Auswertung Versuch 14:

Mathematisches Pendel

von: Jonas Schweer

am: 23.09.24

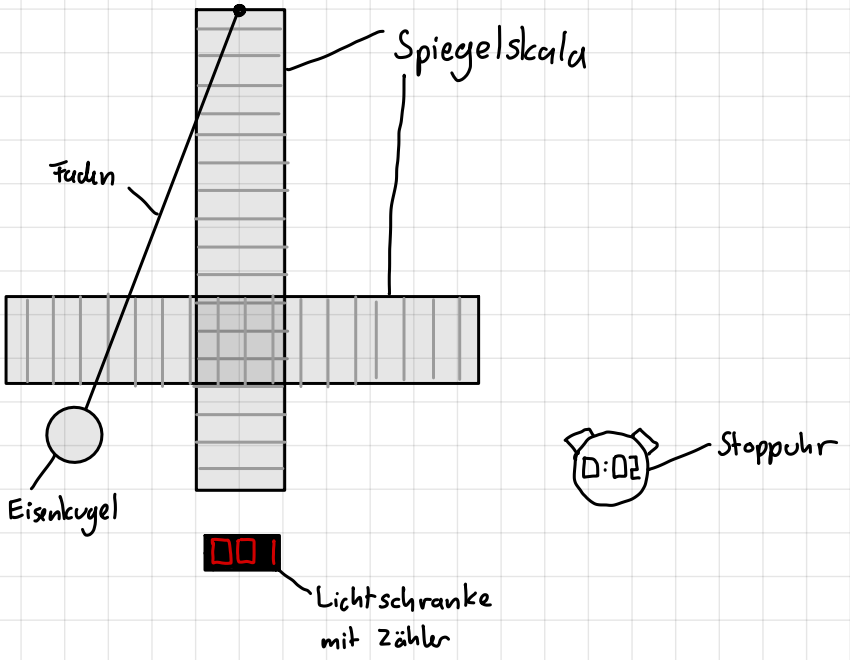
1. Einleitung

1.1 Motivation

In diesem Versuch wollen wir anhand eines schwingenden Fadenpendels einen möglichst genauen Wert für die Erdbeschleunigung g berechnen. Wir wollen dabei insbesondere einige Störfaktoren miteinberechnen, um so möglichst nah an den Echtwert zu kommen.

1.2 Messaufbau

Wir verwenden für alle unsere Messreihen den selben Aufbau: Eine Eisenkugel wird mit einem Faden etwas über dem Boden aufgehangen. Direkt hinter der Aufhängung ist vertikal eine Spiegelskala zum messen der Fadenlänge angebracht. An dieser wiederum ist eine weitere Spiegelskala, diesmal horizontal, befestigt. Mit ihr können wir die Auslenkung jederzeit ablesen. Direkt unter der Ruhelage der Kugel befindet sich eine Lichtschranke mit Zähler. Dieser zählt jedes mal, wenn die Kugel die Ruhelage durchquert. Hier der Aufbau skizziert:



Skizze 1: Versuchsaufbau

1.3 Physikalische Grundlagen

Um diesen Versuch vollständig zu Verstehen, müssen wir erst einige Formeln herleiten und verknüpfen. Für die erste Formel, welche wir auch direkt während dem Versuch verwenden werden, müssen wir uns zuerst das mathematische Pendel anschauen. Bei diesem kann man die Periodendauer berechnen durch:

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}} \qquad (1)$$

Dabei ist L die Fadenlänge und g die Erdbeschleunigung. Stellen wir (1) nun nach g um erhalten wir:

$$g = 4\pi^2 \frac{L}{T_0^2} \qquad (2)$$

Und für dessen Relativfehler nach Gaußscher Fehlerfortpflanzung:

$$\frac{\Delta g}{g} = \sqrt{\left[\frac{\Delta L}{L}\right]^2 + \left[\frac{2\Delta T_0}{T_0}\right]} = \sqrt{\left[\frac{\Delta L}{L}\right]^2 + \left[\frac{2\Delta t}{n T_0}\right]} \qquad (3)$$

Hier ist Δt der Fehler einer Zeitmessung über n Perioden. Man erkennt, dass es keinen Sinn ergibt, die Periodenanzahl riesig groß zu machen, da der Fehler der Längenmessen eine untere Grenze ist. Wir werden bei unserem Versuch die Periodendauer so bestimmen, dass gilt:

$$\frac{2\Delta t}{n T_0} \approx 0{,}3 \frac{\Delta L}{L} \quad \Leftrightarrow \quad n \approx \frac{20 L \Delta t}{3 T_0 \Delta L} \qquad (4)$$

Um nun tatsächlich g präzise zu bestimmen, dürfen wir nicht mehr von der idealisierten Punktmasse des mathematischen Pendels ausgehen, sondern müssen zu einem physikalischen Drehpendel übergehen.

Für dessen Periodendauer gilt:

$$T_D = 2\pi\sqrt{\frac{J}{D}} \qquad (5)$$

J ist das Trägheitsmoment des Pendels ist, und D die Winkelrichtgröße.

Wir brauchen nun einen Weg, auf beide diese Größen zu schließen.

Das Trägheitsmoment setzt sich zusammen aus $J = J_{Faden} + J_{Kugel}$.

Aus dem Steinerschen Satz können wir für diese beiden herausfinden:

$$J_{Faden} = m_F \left[\frac{1}{2} L\right]^2 + \frac{1}{12} m_F L^2 = \frac{1}{3} m_F L^2 \qquad (6)$$

$$J_{Kugel} = m_K L^2 + \frac{2}{5} m_K r^2 \qquad (7)$$

Hier sind m_F und m_K jeweils die Masse des Fadens oder der Kugel, L die Länge des Fadens und r der Radius der Kugel.
Wir nehmen an, dass $L \gg r$ und somit der Abstand von Kugelmitte zur Rotationsachse ungefähr L ist.
Um nun D zu bestimmen, schauen wir uns zuerst das Drehmoment an, das auf das Pendel wirkt. Wenn man für dieses die rücktreibende Kraft, die auf den Faden wirkt, berücksichtigt, sowie die rücktreibende Kraft für die Kugel aus Gewichtskraft und Auftriebskraft, erhält man:

$$M = -\left(m_K \left(1 - \frac{\rho_L}{\rho_K}\right) + \frac{1}{2} m_F\right) g L \varphi \qquad (8)$$

Hierbei wurde erneut angenommen, dass die Fadenlänge $L \gg r$ und dass $\sin\varphi \approx \varphi$.
ρ_L und ρ_K sind die Dichten von Luft und Kugel und m_F und m_K die Massen von Faden/Kugel.
Wenn man nun unsere erhaltene Formel für M mit der Definition von D, also $M = -D\varphi$ gleichsetzt, erkennen wir, dass

$$D = \left(1 - \frac{\rho_L}{\rho_K} + \frac{1}{2}\frac{m_F}{m_K}\right) m_K g L \qquad (9)$$

Die Ergebnisse aus (6), (7) und (9) können wir nun in (5) einsetzen und erhalten für die Periodendauer T_1 mit einer weiteren Näherung:

$$T_1^2 = 4\pi^2 \frac{L}{g}\left(1 + \frac{2}{5}\frac{r^2}{L^2} + \frac{\rho_L}{\rho_K} - \frac{1}{6}\frac{m_F}{m_K}\right) \qquad (10)$$

Bei einem realen Pendel wird die Periodendauer allerdings etwas größer, je weiter man das Pendel auslenkt. Die neue Periodendauer, die mit dieser Korrektur entsteht, ist:

$$T_2^2 = T_1^2 \left(1 + \frac{\varphi_0^2}{8}\right) \qquad (11)$$

Jetzt wollen wir noch zuletzt die Luftreibung miteinbeziehen.

Die Luftreibung lässt die Amplitude exponentiell abfallen. Die Amplitude hat die Form:

$$a(t) = a_0 e^{-\delta t} \qquad (12$$

Wenn wir dieses δ bestimmen, kann man daraus die Änderung der Periodendauer berechnen:

$$T_3^2 = T_2^2 \left[1 + \frac{\delta^2}{\omega_2^2}\right] \approx T_2^2 \left[1 + \frac{\delta^2}{\omega_0^2}\right] \qquad (13)$$

Nach Berücksichtigung dieser letzten zwei Störfaktoren kommen wir letztendlich zu dieser Formel:

$$T_{fin}^2 = 4\pi^2 \frac{L}{g}\left(1 + \frac{2}{5}\frac{r^2}{l^2} + \frac{\rho_L}{\rho_K} - \frac{1}{6}\frac{m_F}{m_K} + \frac{\delta^2}{\omega_0^2} + \frac{\varphi_0^2}{8}\right) \qquad (14)$$

Oder nach g umgestellt:

$$g_{Fin} = 4\pi^2 \frac{L}{T^2}\left(1 + \frac{2}{5}\frac{r^2}{l^2} + \frac{\rho_L}{\rho_K} - \frac{1}{6}\frac{m_F}{m_K} + \frac{\delta^2}{\omega_0^2} + \frac{\varphi_0^2}{8}\right) \qquad (15)$$

Wir haben nun also eine Formel für die finale, korrigierte Erdbeschleunigung g_{Fin}.

Messprotokoll 14: Mathematisches Pendel

11.09.2024

Harish Mahendran
Jonas Schweer
Manuel Sorgenfrei

Messinstrumente:
Stoppuhr
Spiegelskala
Messschieber
Laserschrankenzähler

Kugeldurchmesser: $d_k = (2,4 \pm \frac{1}{200})$ cm

1. Messung der Länge des Pendels

Die Länge wird von dem Pendel wird bestimmt. Dazu messen wir die Länge von Faden + Kugel. Jeder misst 1x mal.

Messung	Länge [cm]
1.	96,5
2.	96,6
3.	96,4

Das ergibt eine Länge des Fadens l:

$l = (94,2 \pm 0,1)$ cm

und ein Länge l' (Länge des Pendels):

$l + \frac{1}{2} d_K = (95,4 \pm 0,1$ cm$)$

2. Bestimmen der Periodendauer (mit Fehler)

Zur Bestimmung der Periodendauer und dem Fehler, werden 5x mal 20 Perioden gemessen.

Messung	t [s]	T_0 [s]
1.	39,17	1,9585
2.	39,04	1,952
3.	39,10	1,955
4.	39,15	1,9575
5.	39,31	1,9655

Daraus ergeben sich folgende Werte:

$\overline{T_0} = 1{,}958\,s$

$\sigma_{\overline{T_0}} = 0{,}004\,s \Rightarrow \Delta t = 0{,}08\,s$

(Fehler $\sigma_{\overline{T_0}}$ max. 20)

Um die Anzahl der benötigten Perioden zu bestimmen, benutzen wir die Formel (16) aus dem Skript:

$$\frac{2\Delta t}{n T_0} \approx 0{,}3 \frac{\Delta l}{l} \quad \Leftrightarrow \quad n = \frac{2}{0{,}3} \cdot \frac{\Delta t}{T_0} \cdot \frac{l}{\Delta l}$$

$$n = 260$$

3. Messung

Wir messen nun die Dauer von 300 Perioden, da man auf die nächste 100 runden sollte. Zu dem werden in regelmäßigen Abständen die Amplitude gemessen.

$T = 587{,}79\,s$ für 300 Perioden

Ruhelage in 12,1 cm

Anzahl der Perioden	Amplitude [cm]
0	18
15	17,6
30	17,4
45	17,3
60	17,2
75	16,8
90	16,6
105	16,5
120	16,4
135	16,3
150	16,25
165	16,1
180	16, 0,5
195	16,0
210	15,8
225	15,7
240	15,6
255	15, 35
270	15,2
285	15,1
300	15,0

Robert Lugs

Auswertung

Aufgabe 1: Berechnung von g ohne Korrekturterme

Zunächst wollen wir g nur aus Periodendauer und Pendellänge bestimmen. Dafür müssen wir zuerst die Länge des Pendels mit Fehler und die Periodendauer mit Fehler bestimmen:

$$\overline{T} = \frac{1}{300} \cdot 587{,}79\,s = 1{,}9593\,s$$

$$\Delta T = \frac{1}{300} \cdot 0{,}2\,s = 0{,}0007\,s$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{L = (95{,}4 \pm 0{,}1)\,cm}} \quad \text{(siehe Protokoll)}$$

$$\underline{\underline{T = (1{,}9593 \pm 0{,}0007)\,s}}$$

Um nun g zu berechnen, stellen wir Formel (1) nach g um und erhalten:

$$g_{Best} = \frac{4\pi^2 L}{T^2} = 9{,}811 \ \frac{m}{s^2}$$

$$\Delta g = \sqrt{\left(\frac{4\pi^2}{T^2}\Delta L\right)^2 + \left(\frac{4\pi^2 L}{T^3}\Delta T\right)^2} = \frac{4\pi^2}{T^2}\sqrt{\Delta L^2 + \left(\frac{L}{T}\Delta T\right)^2} = 0{,}010 \ \frac{m}{s^2}$$

(Berechnet mit Gaußscher Fehlerfortpflanzung)

$$\Rightarrow \underline{\underline{g = (9{,}811 \pm 0{,}010)\,\frac{m}{s^2}}}$$

Aufgabe 2:

Um die Erdbeschleunigung mit Formel (15) zu berechnen, müssen wir erst die nötigen Werte und ihre Fehler bestimmen.

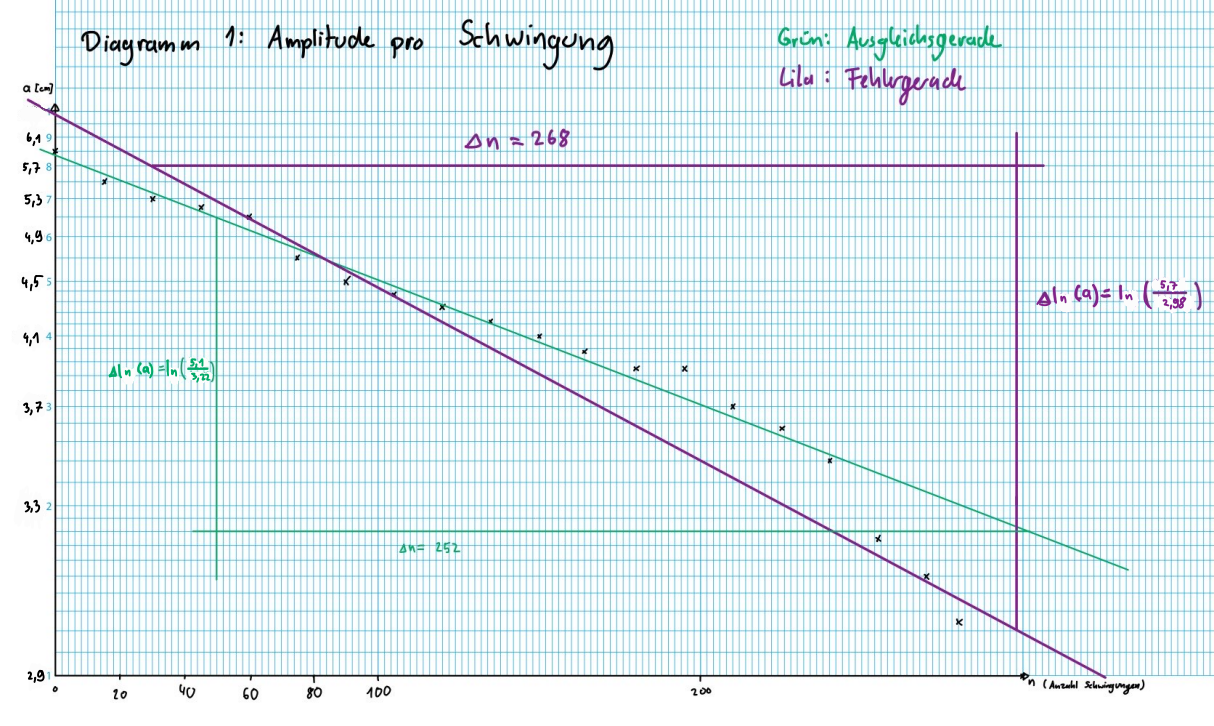
Die Dichten ρ_{Luft} und ρ_{Eisen} sowie der Fadendurchmesser $\varnothing_F$ lassen sich dem Versuchsskript entnehmen. Die Werte für L und ΔL lassen sich aus dem Messprotokoll übernehmen, sowie auch die Anfangsauslenkung φ_0 und $\Delta\varphi_0$.

Den Radius für die Kugel können wir aus dem Durchmesser als $r = \frac{d_K}{2}$ $\Delta r = \frac{\Delta d_K}{2}$ berechnen. Die Masse des Fadens können wir durch sein zylinderförmiges Volumen und Dichte bestimmen: $m_F = \rho_{Eisen} \cdot V_F = \rho_{Eisen} \cdot \frac{\pi}{4} \varnothing_F^2 L$ und $\Delta m_F = \frac{\pi}{4}\varnothing_F^2 \rho_{Eisen} \Delta L$

Für die Masse der Kugel führen wir eine ähnliche Rechnung durch:

$$m_K = \rho_{Eisen} V_K = \rho_{Eisen} \cdot \frac{1}{6}\pi d_K^3 \quad , \quad \Delta m_K = \rho_{Eisen} \frac{1}{2}\pi d_K^2 \Delta d_K$$

Für die Dämpfungskonstante δ müssen wir die Steigung in folgendem Diagramm bestimmen:


Diagramm 1: Amplitude pro Schwingung
Grün: Ausgleichsgerade
Lila: Fehlergerade
a [cm]
6,1
5,7
5,3
4,9
4,5
4,1
3,7
3,3
2,9
Δn = 268
Δln(a) = ln(5,7/2,98)
Δln(a) = ln(5,1/3,22)
Δn = 252
0
20
40
60
80
100
200
n (Anzahl Schwingungen)

Es lässt sich für die Dämpfungskonstante folgendes ablesen:

$$\delta_{Ausgl.} = \frac{\ln\left(\frac{5,1}{3,72}\right)}{252 \cdot T_0} = 0,0009\ s^{-1}$$

$$\delta_{Fehler} = \frac{\ln\left(\frac{5,7}{2,98}\right)}{268 \cdot T_0} = 0,0012\ s^{-1}$$

$$\Rightarrow \delta = (0,0009 \pm 0,0003)\ s^{-1}$$

Um die Winkelfrequenz ω_0 mit Fehler $\Delta\omega_0$ zu berechnen, nutzen wir $\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$ und $\Delta\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0^2}\Delta T_0$

Alle Werte in einer Tabelle ausgerechnet ist hier aufgeschrieben

	Bester Wert	Fehler	Einheit
Periodendauer T	1,9593	0,0007	[s]
Fadenlänge L	95,4	0,1	[cm]
Radius Kugel r	1,2000	0,0025	[cm]
Dichte Luft ρ_L	$1,20 \cdot 10^{-3}$	/	$\left[\frac{g}{cm^3}\right]$
Dichte Kugel ρ_K	7,86	/	$\left[\frac{g}{cm^3}\right]$
Masse Faden m_F	0,23557	0,00024	[g]
Masse Kugel m_K	56,8	0,4	[g]
Dämpfungskonst. δ	0,0009	0,0003	$[s^{-1}]$
Winkelfrequenz ω_0	3,2069	0,0011	$[s^{-1}]$
Anfangsauslenkung φ_0	0,062	0,001	[rad]

Setzen wir diese Werte nun in (15) ein erhalten wir:

$$g = 981,1\ \frac{cm}{s^2}$$

Der Fehler berechnet sich nach Gauss als:

$$\Delta g = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \left(4\pi^2 \frac{L}{T^2}\right)^2 \left(a_3^2 + a_4^2 + a_5^2 + a_6^2 + a_7^2 + a_8^2\right)}$$

mit:

$$a_1 = \left[\frac{4\pi^2}{T^2}\left(1 + \frac{\rho_L}{\rho_K} - \frac{1}{6}\frac{m_F}{m_K} + \frac{\delta^2}{\omega_0^2} + \frac{\varphi_0^2}{8} + \frac{2}{5}\frac{r^2}{L^2}\right)\right]\Delta L$$

$$a_2 = 8\pi^2 \frac{L}{T^3}\left(1 + \frac{2}{5}\frac{r^2}{L^2} + \frac{\rho_L}{\rho_K} - \frac{1}{6}\frac{m_F}{m_K} + \frac{\delta^2}{\omega_0^2} + \frac{\varphi_0^2}{8}\right)\Delta T$$

$$a_3 = \frac{4r}{5L^2}\,\Delta r$$

$$a_4 = \frac{1}{6}\,\frac{\Delta m_F}{m_K}$$

$$a_5 = \frac{1}{6}\,\frac{m_F}{m_K^2}\,\Delta m_K$$

$$a_6 = 2\,\frac{\delta}{\omega_0^2}\,\Delta\delta$$

$$a_7 = 2\,\frac{\delta^2}{\omega_0^3}\,\Delta\omega_0$$

$$a_8 = \frac{\varphi_0}{4}\,\Delta\varphi_0$$

Das ergibt:

$$\Delta g = 0{,}3\,\frac{cm}{s^2}$$

Unser finales Ergebnis für g in SI-Einheiten ist also:

$$g = (9{,}811 \pm 0{,}003)\,\frac{cm}{s^2}$$

4. Zusammenfassung und Diskussion

Bei diesem Versuch haben wir zuerst die Erdbeschleunigung g ohne Korrekturfaktoren bestimmt. Wir haben dies also nur anhand der Pendellänge und der Periodendauer getan. Daraufhin haben wir g erneut berechnet, haben aber durch weitere Messungen einige Korrekturterme berechnen können, welche durch den Aufbau und die Limitationen des realen und nicht idealisierten Pendel zustande kommen, wie Trägheitsmomente, Reibung, Auftrieb etc. So wollten wir einen genaueren Wert für g erhalten.

Vergleicht man unsere beiden Werte für g miteinander, müssen wir leider feststellen, dass diese identisch sind. Unsere gemessenen Korrekturterme haben also die signifikanten Stellen nicht verändert. Lediglich der Fehler wurde kleiner.

Vergleichen wir nun beide Werte mit dem im Skript angegebenen Literaturwert von $g = (9{,}80904 \pm 2 \cdot 10^{-5}) \frac{m}{s^2}$ so erhalten wir für den unkorrigierten Wert eine $0{,}20\,\sigma$-Abweichung und für den korrigierten Wert eine $0{,}7\,\sigma$-Abweichung.

Dass der korrigierte Wert eine größere Abweichung hat, ist allerdings nicht sehr überraschend, da beide Werte gleich waren und so der kleinere Fehler zu einem kleineren Sigma-Bereich geführt hat. Da die Messung trotz wesentlich kleinerem Fehler trotzdem noch weniger als $1\,\sigma$ Abweichung vom Richtwert hat, würde ich trotzdem sagen die Messung war erfolgreich.

Das ist ziemlich überraschend, da mir doch einige Dinge aufgefallen sind, die eventuell zu einem falschen Wert führen könnten.

Zum einen hat das Pendel bei der 300-Perioden-Messung eventuell nicht jedes mal die Lichtschranke getroffen und so die Zeitmessung höher erscheinen lassen, als sie eigentlich ist. Wir haben nicht gesehen, wie eine Periode nicht gezählt wurde, jedoch fiel das Problem bei den vorherigen Messungen schon auf.

Des weiteren ist es echt schwer während dem Schwingen des Pendels die Amplitude akkurat von der Spiegelskala abzulesen. Hier sind sicherlich einige

fehler passiert. Auch mit meiner Auftragung der gemessenen Amplitude in die logarithmische Skala bin ich unzufrieden. Vermutlich darf man die Skala nicht irgendwo beginnen, sondern muss bei 1 starten, jedoch ist die Skalierung dann ungünstig. Dieses Problem wird aber nicht viel am Endergebnis geändert haben, da die Dämpfungskonstante sowieso vernachlässigbar klein wurde.

Bei erneutem Durchführen des Versuches würde ich vermutlich einen anderen Zählmechanismus verwenden, da die Lichtschranke doch echt problematisch war. Auch würde ich den Graphen von einem Computerprogramm plotten und auswerten lassen, da so zeichenfehler vorgebeugt werden.

Alles in allem würde ich aber trotzdem sagen, dass unsere Messung erfolgreich war, und wir einen guten Wert für g erhalten haben.